プログレス数学Ⅲ　1/26～1/29　学習プリント

※1 日大問３問を目安に、「授業ノート」に解き「添削をして」提出すること。卒業考査が近いので、しっかりと取り組むこと

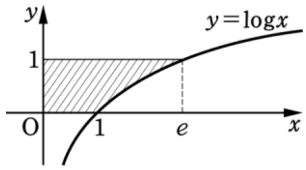
（テスト範囲はこのプリントの問題の範囲に限定します。前回の課題と併せて確認しておくように）

【１】曲線$y=\sqrt{x+1}$とx軸，y軸および直線$x=3$で囲まれた図形の面積を求めよ。

【２】直角双曲線$y=\dfrac{6}{x}$と直線$x+y-7=0$で囲まれた図形の面積を求めよ。

【３】楕円$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$で囲まれた図形の面積を求めよ。

【４】曲線$y=\log x$とx軸，y軸および直線$y=1$で囲まれた図形の面積を求めよ。



【５】媒介変数tを用いて

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t-t^2 \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2)$$

と表された曲線がある。この曲線とx軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

【６】次の曲線で囲まれた図形を、x軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

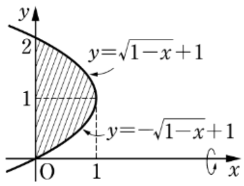
（１）$y=1-x^2$，x軸

（２）$y=1-\sqrt{x}$，x軸，y軸

【７】曲線$y=\dfrac{3}{x+1}-1$とx軸，y軸で囲まれた図形を，y軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

【８】曲線$x=2y-y^2$，$x=0$によって囲まれた図形を，

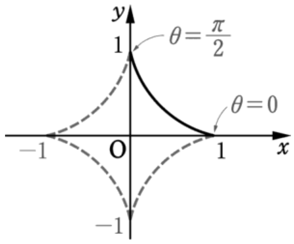
x軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。



【９】

（１）半径rの円$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$の周の長さを求めよ。

（２）アステロイド$\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の長さを求めよ。



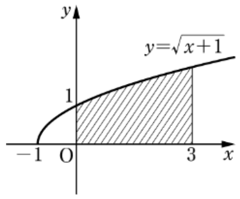
【10】曲線$y=x\sqrt{x}$の$0 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}$の部分の長さを求めよ。

【11】数直線上を動く点Pの時刻tにおける速度が$v(t)=\sin t$ であるとき，

$t=0$から$t=2\pi$までに点Pが動く道のりを求めよ。

【１】

区間$0 \leqq x \leqq 3$ で $\sqrt{x+1} \geqq 0$ であるから、



$$\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

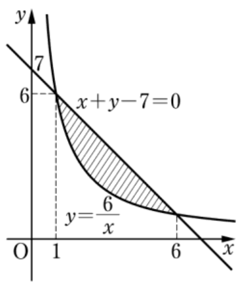
$$= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3} \times 4 \times 2 - \frac{2}{3} \times 1 \times 1$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{14}{3}}$$

【２】

曲線$y = \dfrac{6}{x}$と直線$x + y - 7 = 0$、つまり$y = -x + 7$ との交点の座標は,



$$\frac{6}{x} = -x + 7$$

$$6 = -x^2 + 7x$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x-6) = 0$$

$$x = 1, 6$$

また，区間$1 \leqq x \leqq 6$で$-x+7 \geqq \dfrac{6}{x}$ であるから，求める面積は

$$\int_1^6 \left\{(-x+7) - \frac{6}{x}\right\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 7x - 6\log|\,x\,|\right]_1^6$$

$$= (-18 + 42 - 6\log 6) - \left(-\frac{1}{2} + 7 - 0\right)$$

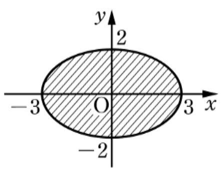
$$= -18 + 42 - 6\log 6 + \frac{1}{2} - 7$$

$$= 17 + \frac{1}{2} - 6\log 6$$

$$= \boldsymbol{\frac{35}{2} - 6\log 6}$$

【３】

楕円の方程式をyについて解くと



$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9}$$

$$y^2 = \frac{4}{9}(9 - x^2)$$

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

ここで求める面積は、区間$0 \leqq x \leqq 3$ で$\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \geqq 0$ より、

この区間で囲まれた図形の面積の４倍であるから

$$4\times\int_0^3\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx \quad \leftarrow\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$ は、原点中心で

$$=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}\times 9\pi$$ 半径r の円の面積の４分の１

$$=\mathbf{6\pi}$$

【４】

$y=\log x$を変形すると$x=e^y$となり、
区間$0\leqq y\leqq 1$ で$e^y\geqq 0$ ($e^y>0$) より、
求める面積は

$$S=\int_0^1 e^y\,dy=[e^y]_0^1=\boldsymbol{e-1}$$

【５】

$x=2t+1$ より、$0\leqq t\leqq 2$ のとき$1\leqq x\leqq 5$ となる。
ここで、$0\leqq t\leqq 2$ のとき$y=-t(t-2)\geqq 0$ であるから、
求める面積は$\int_1^5 y\,dx$ で求められる。

$x=2t+1$であるから$\dfrac{dx}{dt}=2$となるので、

x	$1\to 5$
t	$0\to 2$

$$\int_1^5(2t-t^2)dx$$

$$=\int_0^2(2t-t^2)\times\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^2(4t-2t^2)dt$$

$$=\left[2t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^2=8-\frac{16}{3}=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

【６】

（１）求める体積は

$$\int_{-1}^1\pi(1-x^2)^2\,dx$$

$$=\int_{-1}^1\pi(1-2x^2+x^4)dx$$

$$=2\pi\int_0^1(1-2x^2+x^4)\,dx$$ ←偶関数

$$=2\pi\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

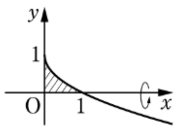
$$=2\pi\times\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=2\pi\times\left(\frac{15}{15}-\frac{10}{15}+\frac{3}{15}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{16}{15}\pi}$$

（２）求める回転体の体積は、

$$\pi\int_0^1\left(1-\sqrt{x}\right)^2dx$$



$$=\pi\int_0^1\left(1-2\sqrt{x}+x\right)dx$$

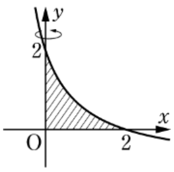
$$=\pi\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\pi-\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi$$

$$=\frac{6-8+3}{6}\pi=\frac{\pi}{6}$$

【７】

$$y=\frac{3}{x+1}-1$$



$$y+1=\frac{3}{x+1}$$

$$(x+1)(y+1)=3$$

$$x(y+1)+y+1=3$$

$$x(y+1)=-y+2$$

$$x=\frac{-y+2}{y+1}$$

$$x=\frac{-(y+1)+3}{y+1}$$

$$x=\frac{3}{y+1}-1\quad\cdots①$$

また、$y=\dfrac{3}{x+1}-1$ とy 軸との交点の座標は、①に$y=0$ を代入して

$x=2$ となるので、求める回転体の体積は、

$$\pi\int_0^2\left(\frac{3}{y+1}-1\right)^2dy$$

$$=\pi\int_0^2\left\{\frac{9}{(y+1)^2}-\frac{6}{y+1}+1\right\}dy$$

$$=\pi\left[\frac{-9}{y+1}-6\log|y+1|+y\right]_0^2$$

$$=\pi\{(-3-6\log 3+2)-(-9)\}$$

$$\boldsymbol{=2\pi(4-3\log 3)}$$

【８】$x=2y-y^2$を変形すると

$$y^2-2y=-x$$

$$(y-1)^2=1-x$$

$$y=1\pm\sqrt{1-x}$$

ここで、区間$0\leqq x\leqq 1$ で$1+\sqrt{1-x}\geqq 1-\sqrt{1-x}\geqq 0$ であるから、
求める回転体の体積は、

$$\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2dx-\pi\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1 4\sqrt{1-x}\,dx$$

$=4\pi\int_0^1 \sqrt{1-x}\ dx$

$=4\pi\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}\ dx$

$=4\pi\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=4\pi\left\{0-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$

$=\boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}$

【９】

（１）$\frac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta$ ，$\frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta$

であるから，求める周の長さは

$\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2}\ d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\ d\theta$

$=\int_0^{2\pi} r\ d\theta$

$=r[\theta]_0^{2\pi}=\boldsymbol{2\pi r}$

（２）$\frac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta\times(-\sin\theta)=-3\sin\theta\cos^2\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\times\cos\theta=3\sin^2\theta\cos\theta$

よって

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\\ &=(-3\sin\theta\cos^2\theta)^2+(3\sin^2\theta\cos\theta)^2\\ &=9\sin^2\theta\cos^4\theta+9\sin^4\theta\cos^2\theta\\ &=9\sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\ &=9\sin^2\theta\cos^2\theta\end{aligned}$$

区間$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$において$\sin\theta\geqq0$, $\cos\theta\geqq0$であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=3\sin\theta\cos\theta$$

したがって，求める曲線の長さは

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\theta\cos\theta\ d\theta$

$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\sin(\theta+\theta)+\sin(\theta-\theta)\}\ d\theta$

$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\ d\theta$

$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

【10】

$y=x^{\frac{3}{2}}$ より、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$であるから

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2=1+\frac{9}{4}x$$

したがって，求める曲線の長さは

$$\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx$$

$$=\left[\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{4}{3}}$$

$$=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right]_0^{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{8}{27}\times4\times2-\frac{8}{27}\times1\times1$$

$$=\boldsymbol{\frac{56}{27}}$$

【11】区間$0\leqq t\leqq 2\pi$ において、

$0\leqq t\leqq\pi$ のとき、$\sin t\geqq 0$

$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき、$\sin t\leqq 0$ であるから、

$$\int_0^{\pi}\sin t\ dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)\ dt$$

$$=[-\cos t]_0^{\pi}+[\cos t]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=-\cos\pi+\cos0+\cos2\pi-\cos\pi$$

$$=\mathbf{4}$$