プログレス数学Ⅲ　1/19～1/22　学習プリント

※1 日大問３問を目安に、「授業ノート」に解き「添削をして」提出すること。卒業考査が近いので、しっかりと取り組むこと

【１】次の各組の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

（１）$y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$, x軸

（２）$y=x^2$, $y=\sqrt{x}$

（３）$y=\cos x$, $y=\cos 2x$　$(0\leqq x\leqq \pi)$

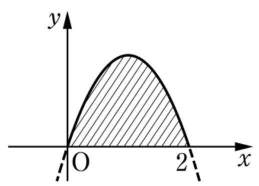
【２】次の楕円で囲まれた図形の面積を求めよ。

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

【３】曲線$x=-y^2+2y$, y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

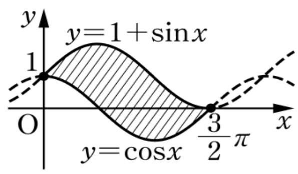
【４】媒介変数tを用いて$x=\dfrac{t}{3}$, $y=t-\dfrac{t^2}{6}$ $(0\leqq t\leqq 6)$と表された曲線がある。

この曲線とx軸で囲まれた図形の面積を求めよ。



【５】曲線$y=1+\sin x$と曲線$y=\cos x$で囲まれた図形の面積を求めよ。

但し，$0\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}\pi$とする。



【６】次の各組の曲線や直線で囲まれた図形を，x軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

（１）$y=e^x$, $x=1$, $x=2$, x軸

（２）$y=x^2-2x$, x軸

【７】次の曲線$y=2-\sqrt{x}$とx軸，y軸で囲まれた図形を，y軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

【８】曲線$y=x^2$, $y=3x$によって囲まれた図形を，x軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

【９】次の媒介変数で表された曲線の，それぞれの区間における長さを求めよ。

（１）$\begin{cases} x=2\cos^2\theta \\ y=\sin 2\theta \end{cases}$　$(0\leqq \theta\leqq 3)$

（２）$\begin{cases} x=4t \\ y=8\sqrt{t^3} \end{cases}$　$(0\leqq t\leqq 1)$

【10】次の曲線の，それぞれの区間における長さを求めよ。

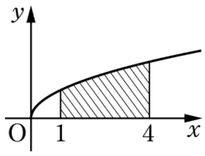
（1）$y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$　$(1\leqq x\leqq 2)$

（2）$y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$　$(0\leqq x\leqq 2)$

【11】数直線上を動く点の時刻tにおける速度が$v(t)=\cos t$ であるとき，$t=0$から$t=\pi$までに点が動く道のりを求めよ。

【１】

（１）区間$1 \leqq x \leqq 4$ で $\sqrt{x} \geqq 0$ であるから



求める面積は、

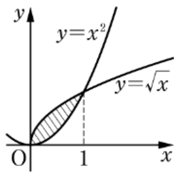
$$\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$$

$$= \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{3} \times 4 \times 2 - \frac{2}{3} \times 1 \times 1 = \mathbf{\frac{14}{3}}$$



（２）曲線$y = x^2$と曲線$y = \sqrt{x}$の交点のx座標は，

方程式$x^2 = \sqrt{x}$の解であるから

$x = 0,\ 1$

また，区間$0 \leqq x \leqq 1$において，$\sqrt{x} \geqq x^2$であるから，求める面積は

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

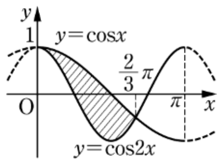
（３）曲線$y = \cos x$と$y = \cos 2x$の交点のx座標は，方程式$\cos x = \cos 2x$の解である。

$\cos x = 2\cos^2 x - 1$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = -\dfrac{1}{2},\ \cos x = 1$



$0 \leqq x \leqq \pi$より　$x = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi$

また，区間$0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$において，$\cos x \geqq \cos 2x$であるから，求める面積は

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos x - \cos 2x)\, dx$$

$$= \left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \sin\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{4}{3}\pi$$

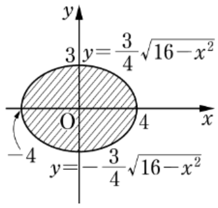
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

【２】

$$\frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{16}$$

$$y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$$

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$$



ここで求める面積は、区間$0\leqq x\leqq 4$ で$\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\geqq 0$ で、第１象限で囲まれた図形の面積の４倍であるから

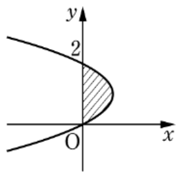
$$4\int_0^4\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$=3\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$=3\times\frac{1}{4}\times 16\pi=12\pi$$

【３】

$x=-y^2+2y$, y 軸の交点の座標は



$-y^2+2y=0$とすると　$y=0,\ 2$

区間$0\leqq y\leqq 2$ で$-y^2+2y\geqq 0$ であるから、

求める面積は、

$$\int_0^2(-y^2+2y)\,dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{8}{3}+4$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

【４】

$$y=t-\frac{t^2}{6}=-\frac{t}{6}(t-6)$$

よって，$0\leqq t\leqq 6$のとき$y\geqq 0$である。

また，$0\leqq t\leqq 6$のとき$x=\frac{1}{3}t$より$0\leqq x\leqq 2$である。

よって，求める面積は$\int_0^2 y\,dx$ である。

ここで、$x=\frac{1}{3}t$であるから　$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$ となるので、

x	$0\to 2$
t	$0\to 6$

$$\int_0^2 y\,dx=\int_0^6\left(t-\frac{t^2}{6}\right)\times\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^6\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{18}t^2\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{6}t^2-\frac{1}{54}t^3\right]_0^6$$

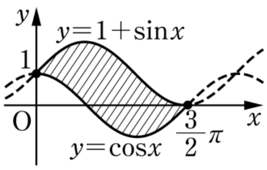
$$=6-\frac{216}{54}=6-4=2$$

【５】

区間$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$において

$$1+\sin x \geqq \cos x$$

であるから，求める面積は



$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(1+\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=\Big[x-\cos x-\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$

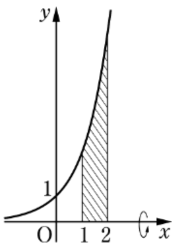
$$=\frac{3}{2}\pi-\cos\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{3}{2}\pi-(0-\cos 0-\sin 0)$$

$$=\frac{3}{2}\pi-0-(-1)-(0-1-0)$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi+2}$$

【６】

（１）求める回転体の体積は



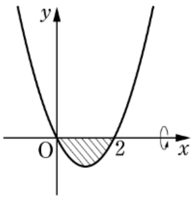
$$\pi\int_1^2(e^x)^2\,dx$$

$$=\pi\int_1^2 e^{2x}\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^4-e^2)}$$

（２）求める回転体の体積は、



$$\pi\int_0^2(x^2-2x)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{5}\pi-16\pi+\frac{32}{3}\pi$$

$$=\frac{96}{15}\pi-\frac{240}{15}\pi+\frac{160}{15}\pi$$

$$=\boldsymbol{\frac{16}{15}\pi}$$

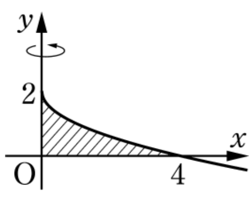
【７】

$y=2-\sqrt{x}$をxについて解くと

$$\sqrt{x}=2-y$$

より、両辺２乗して$x=(2-y)^2$

図の斜線部分をy軸のまわりに1回転してできる回転体の体積は

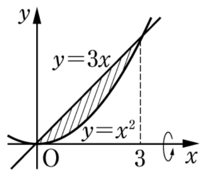


$$\pi\int_0^2 x^2\,dy=\pi\int_0^2(2-y)^4\,dy$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{5}(2-y)^5\right]_0^2=0-\left(-\frac{32}{5}\pi\right)=\boldsymbol{\frac{32}{5}\pi}$$

【８】

曲線$y=x^2$と直線$y=3x$との共有点の座標は



$x^2=3x$

$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

区間$0\leqq x\leqq 3$において， $3x\geqq x^2\geqq 0$ （←外と内の区別）であるから、求める回転体の体積は、

$$\pi\int_0^3(3x)^2\,dx-\pi\int_0^3(x^2)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^3(9x^2-x^4)\,dx=\pi\Big[3x^3-\frac{1}{5}x^5\Big]_0^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{162}{5}\pi}$$

【９】

（１） $\dfrac{dx}{d\theta}=4\cos\theta\times(-\sin\theta)=-2\times2\sin\theta\cos\theta=-2\sin2\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos2\theta$

であるから，求める曲線の長さは

$$\int_0^3\sqrt{(-2\sin2\theta)^2+(2\cos2\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^3(4\sin^2 2\theta+4\cos^2 2\theta)\,d\theta$$

$$=2\int_0^3 d\theta=2[\theta]_0^3=\mathbf{6}$$

（２） $\dfrac{dx}{dt}=4,\ \dfrac{dy}{dt}=12\sqrt{t}$であるから，求める曲線の長さは

$$\int_0^1\sqrt{4^2+\left(12\sqrt{t}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{16+144t^2}\,dt$$

$$=4\int_0^1\sqrt{1+9t}\,dt$$

$$=4\Big[\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}(1+9t)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1$$

$$=\frac{8}{27}(1+9t)\sqrt{1+9t}$$

$$=\boldsymbol{\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)}$$

【10】

（１） $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2x^2}$であるから，求める曲線の長さは

$$\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx$$

$$=\int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{6}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{12}-\frac{3}{12}-\frac{2}{12}+\frac{6}{12}=\mathbf{\frac{17}{12}}$$

（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}$ であるから，求める曲線の長さは

$$\int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^2 \sqrt{\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{4}}\,dx$$

$$=\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}+\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^2 \frac{\sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^2=\boldsymbol{e-\frac{1}{e}}$$

【11】$0\leqq t\leqq \pi$ において、

$0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\cos t\geqq 0$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq \pi$ のとき、$\cos t\leqq 0$ であるから、求める道のりは

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos t)\,dt$$

$$=[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=(1-0)-(0-1)=\mathbf{2}$$