

1 二項定理を用いて、次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)^5$

(2) $(2x+3)^4$

(3) $(2x-1)^5$

2 次の式を展開したとき、それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1) $(a+2b)^5$ における a^3b^2

(2) $(2x-3y)^6$ における x^2y^4

(3) $(2x+y)^7$ における x^4y^3

3 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

(1) $x^2-3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$

(2) $2x^2-3=ax^2+bx+c$

(3) $(a+4)x^2+(2b-1)x-3c=0$

4 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

(1) $x^2+x+1=a(x-1)^2+b(x+2)+c$

(2) $(x+1)(x^2+ax+b)=x^3+cx+2$

1

(1) $(a+b)^5$

$$= {}_5C_0 \times a^5 + {}_5C_1 \times a^4 \times b + {}_5C_2 \times a^3 \times b^2 + {}_5C_3 \times a^2 \times b^3 + {}_5C_4 \times a \times b^4 + {}_5C_5 \times b^5$$

$$= 1 \times a^5 + 5 \times a^4 \times b + 10 \times a^3 \times b^2 + 10 \times a^2 \times b^3 + 5 \times a \times b^4 + 1 \times b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

(2) $(2x+3)^4$

$$= {}_4C_0 \times (2x)^4 + {}_4C_1 \times (2x)^3 \times 3 + {}_4C_2 \times (2x)^2 \times 3^2 + {}_4C_3 \times (2x)^1 \times 3^3 + {}_4C_4 \times 3^4$$

$$= 1 \times 16x^4 + 4 \times 8x^3 \times 3 + 6 \times 4x^2 \times 9 + 4 \times 2x \times 27 + 1 \times 81$$

$$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$$

(3) $(2x-1)^5$

$$= {}_5C_0 \times (2x)^5 + {}_5C_1 \times (2x)^4 \times (-1) + {}_5C_2 \times (2x)^3 \times (-1)^2$$

$$+ {}_5C_3 \times (2x)^2 \times (-1)^3 + {}_5C_4 \times (2x)^1 \times (-1)^4 + {}_5C_5 \times (-1)^5$$

$$= 1 \times 32x^5 + 5 \times 16x^4 \times (-1) + 10 \times 8x^3 \times 1 + 10 \times 4x^2 \times (-1) + 5 \times 2x \times 1 + 1 \times (-1)$$

$$= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$$

2

(1) $(a+2b)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r \times a^{5-r} \times (2b)^r = {}_5C_r \times a^{5-r} \times 2^r \times b^r = {}_5C_r \times 2^r \times a^{5-r} b^r$$

と表される。

ここで、 a^3b^2 となるのは、 $r=2$ の場合であるから

求める係数は、

$${}_5C_2 \times 2^2 = 10 \times 4 = 40$$

(2) $(2x-3y)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r \times (2x)^{6-r} \times (-3y)^r = {}_6C_r \times 2^{6-r} \times x^{6-r} \times (-3)^r \times y^r$$

$$= {}_6C_r \times 2^{6-r} \times (-3)^r \times x^{6-r} y^r$$

と表される。

ここで、 x^2y^4 となるのは、 $r=4$ の場合であるから

求める係数は

$${}_6C_4 \times 2^2 \times (-3)^4 = 15 \times 4 \times 81 = 4860$$

(3) $(2x+y)^7$ の展開式における一般項は

$${}_7C_r \times (2x)^{7-r} \times y^r = {}_7C_r \times 2^{7-r} \times x^{7-r} y^r$$

と表される。

ここで、 x^4y^3 となるのは、 $r=3$ の場合であるから、

求める係数は

$${}_7C_3 \times 2^{7-3} = 35 \times 2^4 = 35 \times 16 = 560$$

③ (1) 左辺 $=x^2-3$

右辺 $=a(x^2-1)+b(x-1)+c=ax^2+bx+(-a-b+c)$

であるから、同じ次数の項の係数を比較して

$$a=1, b=0, -a-b+c=-3$$

これを解いて $a=1, b=0, c=-2$

(2) 等式が恒等式となるためには

$$a=2, b=0, c=-3$$

(3) 等式が恒等式となるためには

$$a+4=0, 2b-1=0, -3c=0$$

よって

$$a=-4, b=\frac{1}{2}, c=0$$

④

(1) $x^2+x+1=a(x-1)^2+b(x+2)+c$

右辺を展開して整理すると、この等式は

$$x^2+x+1=ax^2+(-2a+b)x+a+2b+c$$

となるから、両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a=1 \quad \dots\text{①}$$

$$-2a+b=1 \quad \dots\text{②}$$

$$a+2b+c=1 \quad \dots\text{③}$$

①, ②, ③を順番に解いて a, b, c を求めると

$$a=1, b=3, c=-6$$

(2) $(x+1)(x^2+ax+b)=x^3+cx+2$

左辺を展開して整理すると、この等式は

$$x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b=x^3+cx+2$$

となるから、両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a+1=0 \quad \dots\text{①}$$

$$a+b=c \quad \dots\text{②}$$

$$b=2 \quad \dots\text{③}$$

①, ③を②に代入して a, b, c を求めると

$$a=-1, b=2, c=1$$